Capitolul 3

PROGRAMAREA LINIARĂ

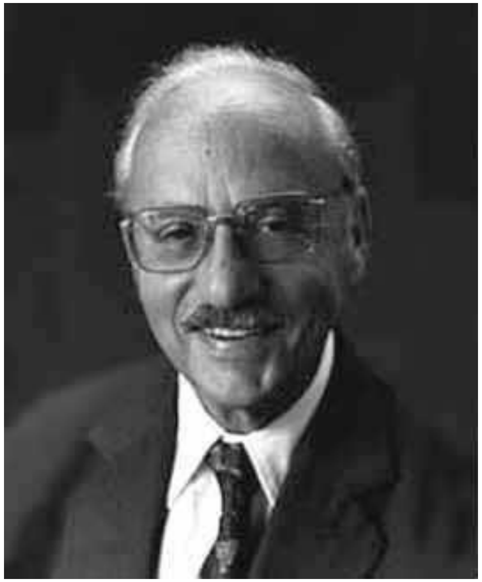
Ce este programarea liniară?

- ***"... determinarea valorii maxime sau minime a unei funcții liniare, în care mai multe variabilele de optimizare sunt supuse unor restricţii." (dictionary.com)***
- ***O problemă de programare liniară este o "problemă care necesită minimizarea unei funcţii ce are o expresie liniară în prezenţa unor restricţii liniare..." (Dantzig)***

Istoria Programării Liniare

- ***Totul a început în anul 1947, când GB Dantzig a pus bazele "metodei simplex" folosită în rezolvarea problemelor de planificare din US Air Force, probleme care aveau o formă liniară.***

- ***Ulterior, a devenit clar faptul că o gamă surprinzator de largă de probleme din diverse domenii pot fi aduse la o formă corespunzătoare programării liniare și rezolvate prin metoda simplex.***



Importanţa PROGRAMĂRII LINIARE

Multe dintre problemele din lumea reală se pretează a fi rezolvate folosind programarea liniară.

- **Inginerie ;**
- **Agricultură;**
- **Marketing ;**
- **Economie;**
- **Finanțe (investiții);**
- **Publicitate.**

Ce este o problemă de programare liniară?

O problemă de programare liniară (PL) este o problemă de optimizare în care:

1. Se încearcă maximizarea (sau minimizarea) unei funcții ce are o expresie liniară (numită funcția obiectiv) dependentă de variabilele de optimizare;
2. Valorile variabilelor de optimizare trebuie să satisfacă o mulţime de restriicţii;
3. Fiecare restricţie de egalitate sau inegalitate trebuie să aibă o expresie liniară.
4. O restricție de semn este asociată fiecărei variabile de optimizare. Pentru fiecare variabilă x_i, avem ($x_i \geq 0$).

Descrierea problemei

$$\textbf{max (min)} \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

în prezenţa restricţiilor:

$$\begin{array}{c}
a_{1,1}x_1 + \dots a_{1,n}x_n \leq b_1 \\
a_{2,1}x_1 + \dots a_{2,n}x_n \leq b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
a_{m,1}x_1 + \dots a_{m,n}x_n \leq b_n
\end{array}$$

sau, într-o formă simplificată:

$$\text{max (min)} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

în prezenţa restricţiilor:

$$\begin{array}{llll}
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \leq & b_i & (i = 1, 2, \dots, m) \\
x_j & \geq & 0 & (j = 1, 2, \dots, n)
\end{array}$$

Exemplu :

$$\begin{array}{lll} \text{Max} & 5x_1 + 7x_2 & \\ \text{s.t.} & x_1 & \le 6 \\ & 2x_1 + 3x_2 & \le 19 \\ & x_1 + x_2 & \le 8 \\ & x_1 \ge 0 \text{ and } x_2 \ge 0 & \end{array}$$

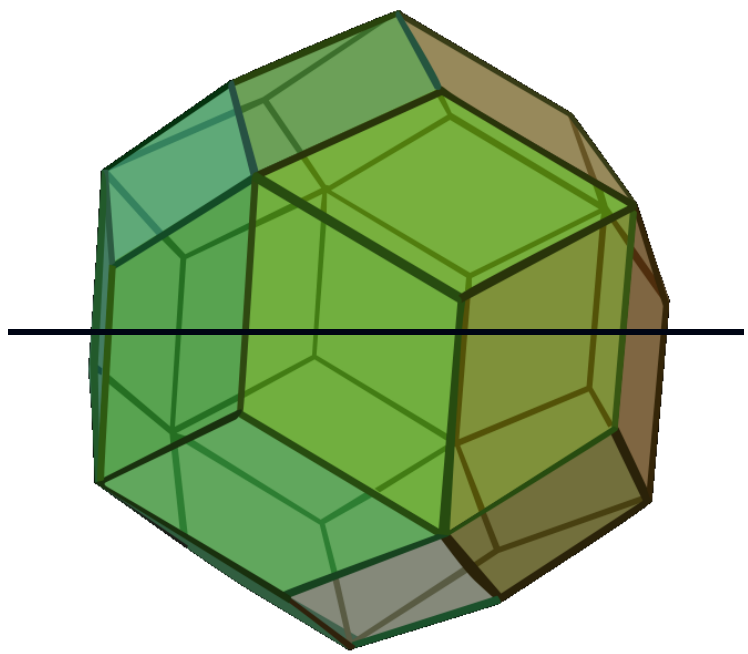
Funcția obiectiv

Restricții

Restricții de non-negativitate

Incercaţi şi imaginaţi-vă…

- Un poliedru foarte mare, convex;
- Un plan care intersectează această poliedru;



Interpretarea reprezentării grafice

- Poliedrul reprezintă mulţimea de restricţii de inegalitate.
- Planul reprezintă funcția obiectiv liniară care trebuie maximizată.

Important

- Programarea liniară solicită numai expresii liniare.

Expresie corectă: $ax + by + cz \leq 3$

Expresie incorectă: $\cancel{ax^2 + \log_2 y \geq 7}$

Proporţionalitate şi ipoteze suplimentare

Funcția obiectiv corespunzătoare unei probleme de programare liniară trebuie să fie o funcție lineară dependentă de variabilele de decizie, ceea ce presupune următoarele două implicații:

1. **Contribuția fiecărei variabile de optimizare la valoarea funcției obiectiv este proporțională cu valoarea variabilei de optimizare.**
2. **Contribuția la valoarea funcției obiectiv a fiecărei variabile de optimizare este independentă de celelalte variabile de optimizare.**

Proporţionalitate şi ipoteze suplimentare - continuare

Fiecare restricţie trebuie să fie o inegalitate liniară sau o ecuație liniară, ceea ce presupune următoarele două implicații:

1. Contribuția fiecărei variabile de optimizare la expresia fiecărei restricţii este proporțională cu valoarea variabilei.

2.Contribuția unei variabile de optimizare din cadrul expresiei fiecărei restricţii este independentă de valorile variabilei.

Proporţionalitate şi ipoteze suplimentare - continuare

Ipoteza divizibilităţii

Presupunerea divizibilităţii necesită ca fiecare variabilă de optimizare să poată lua valori fracționare.

Ipoteza certitudinii

Presupunerea certitudinii necesită ca fiecare componentă din modelul matematic corespunzător unei probleme de programare liniară (coeficienții funcției obiective, termenii liberi din restricţii și coeficienţii din expresiile restricţiilor) să fie cunoscută cu certitudine.

Forma matematică a problemelor PL

1. Forma generală

$$\max(\min) F(X) = \max(\min) \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, n$$

Forma matematică a problemelor PL

2. Forma standard

Forma în care toate restricţiile sunt exprimate prin egalităţi şi toate variabilele sunt supuse condiţiei de nonnegativitate.

$$\max(\min) F(X) = \max(\min)(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n)$$

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n$$

Variabile suplimentare de eliminare/adăugare

- **Forma standard este obținută prin adăugarea de variabile pentru forma inegalitaţilor “≤”, și prin eliminarea de variabile forma inegalitaţilor “≥”.**

- **Variabilele suplimentare de eliminare/adăugare reprezintă diferența dintre partea stânga și cea dreaptă a restricţiilor.**

- **In expresia funcţiei obiectiv, aceste variabile suplimenare au coeficienți egali cu 0.**

Examplul 1 in Forma Standard

$$\max \quad 5x_1 + 7x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$$

în prezenţa restricţiilor:

$$\begin{aligned}
x_1 \phantom{{}+3x_2} + s_1 &= 6 \\
2x_1 + 3x_2 + s_2 &= 19 \\
x_1 + x_2 + s_3 &= 8 \\
x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 &\geq 0
\end{aligned}$$

s_1 , s_2 , şi s_3 sunt variabile auxiliare de adaugare

Forma matematică a problemelor PL

3. Forma matriceala

$$\max(\min) F(X) = \max(\min) CX$$

$$AX = b$$

$$X \geq 0$$

A **– matricea coeficienţilor sistemului de restricţii;**
b **– vectorul coloană al termenilor liberi;**
X **– vectorul coloană al celor *n* necunoscute;**
C **– vectorul coeficienţilor funcţiei obiectiv *F*(*X*).**

Forma matematică a problemelor PL

4. Forma vectorială

Se obţine prin partiţionarea matricei *A* după coloanele sale, a_1, $a_{2,}$ …a_n.

$$\max F(X) = \max CX$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

$$X \geq 0$$

a **– coloanele matricei *A* corespunzătoare sistemului de restricţii;**
b **– vectorul coloană al termenilor liberi;**
x **– cele *n* necunoscute;**
C **– vectorul coeficienţilor funcţiei obiectiv *F*(*X*).**

Forma matematică a problemelor PL

5. Forma canonică

Forma în care restricţiile sunt concordante şi toate variabilele sunt supuse condiţiei de nenegativitate.

O restricţie corespunzătoare unei probleme de programare liniară spunem că este concordantă dacă este o inegalitate de tipul " ≥ ", când funcţia obiectiv trebuie minimizată, respectiv este o egalitate de tipul " ≤ ", când se cere maximizarea funcţiei obiectiv.

$$\begin{aligned} &\max F(X) = \max CX \\ &AX \le b \\ &X \ge 0 \end{aligned}$$

sau

$$\begin{aligned} &\min F(X) = \min CX \\ &AX \ge b \\ &X \ge 0 \end{aligned}$$

Definiţii în Programarea Liniară

O *soluţie admisibilă* a problemei de programare liniară este un vector $X = [x_1, x_2, ..., x_n]^t$ care satisface sistemul de ecuaţii al restricţiilor, respectiv condiţia de nenegativitate.

O *soluţie admisibilă de bază* este o soluţie admisibilă care conţine cel puţin ($n - m$) componente x_j care au valoarea zero, în care m este numărul restricţiilor iar n reprezintă numărul variabilelor de optimizare.

O *soluţie admisibilă de bază nedegenerată* are exact m necunoscute x_j cu valoare pozitivă (> 0).

O *soluţie optimală* este o soluţie admisibilă care extremizează funcţia obiectiv.

Teoreme în Programarea Liniară

Teorema 1

Funcţia obiectiv îşi realizează optimul într-un punct extrem al mulţimii restricţiilor. Dacă îşi realizează optimul în mai mult decât un punct extrem, atunci funcţia obiectiv ia aceeaşi valoare în fiecare punct de pe segmentul de dreaptă care uneşte oricare două puncte optimale.

Teorema 2

Un vector $X = [x_1, x_2, ..., x_n]^t$ este un punct extrem al mulţimii restricţiilor unei probleme de programare liniară dacă şi numai dacă X este o soluţie admisibilă de bază.

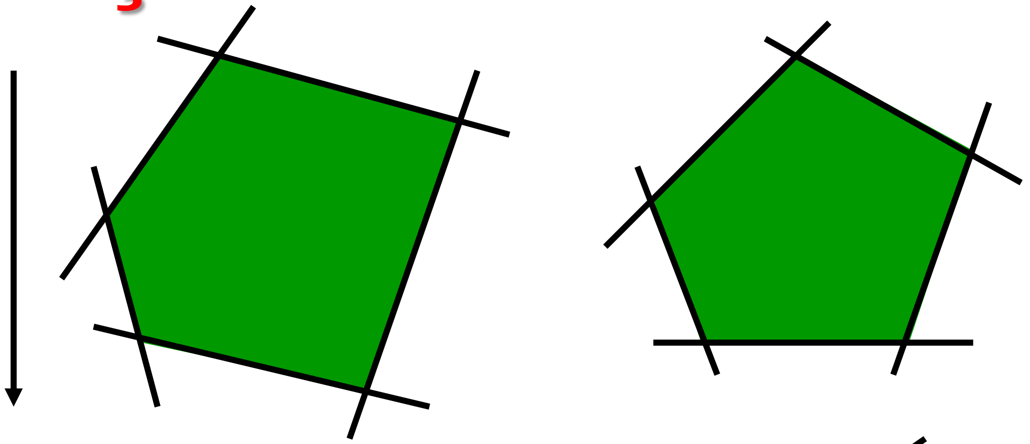
Analiza grafică în Programarea Liniară

Mulţimea tuturor punctelor care îndeplinesc toate restricţiile modelului matematic se numeşte

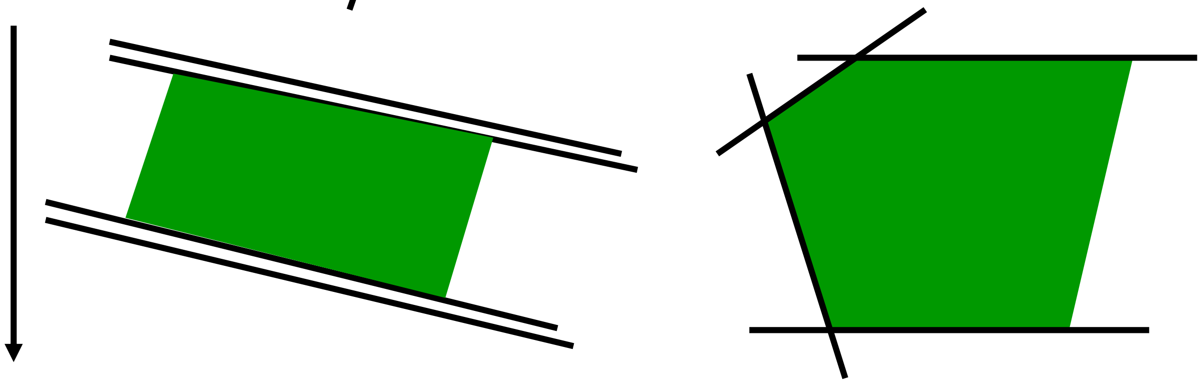
MULŢIME ADMISIBILĂ

Mulţimi admisibile

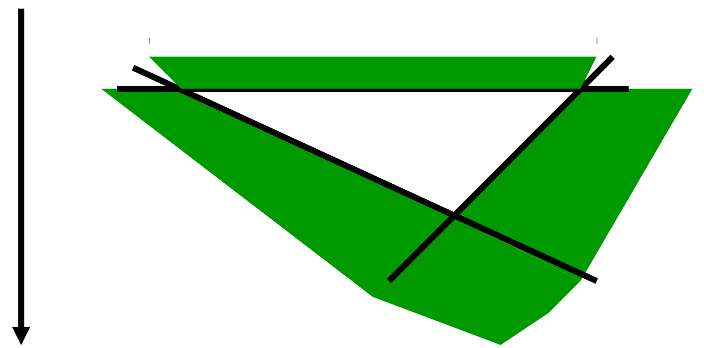
1. Mărginite



2. Nemărginite



3. Vide (Goale)



Paşii Algoritmului

- **Reprezentarea grafică a inegalităților și identificarea vârfurilor poligonului format.**
- **Înlocuirea coordonatelor nodurile în funcția obiectiv**
- **Determinarea valorilor minimă şi maximă.**

Exemplul 1.

Să se determine minimul funcţiei

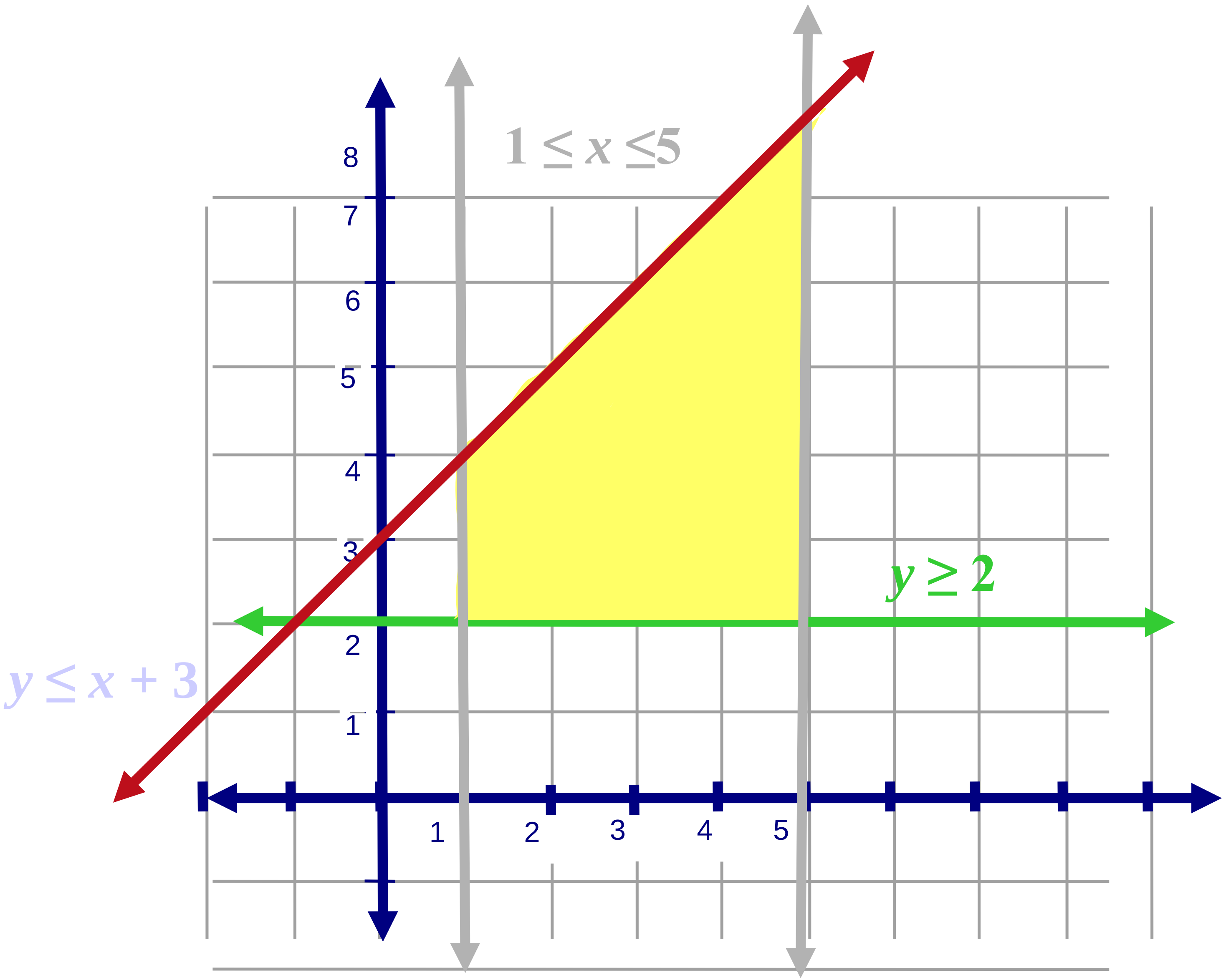
$$F(x, y) = 3x - 2y.$$

în prezenţa restricţiilor:

$y \geq 2$

$1 \leq x \leq 5$

$y \leq x + 3$



$1 \leq x \leq 5$
$y \geq 2$
$y \leq x + 3$
8
7
6
5
4
3
2
1
1
2
3
4
5

- **Vârfurile poligonului format sunt:**

  (1, 2) (1, 4) (5, 2) (5, 8)

- **Coordonatele determinate în pasul anterior sunt introduse succesiv în fucţia obiectiv:**

$$\mathbf{F(\mathit{x}, \mathit{y}) = 3\mathit{x} - 2\mathit{y}}$$

$\mathbf{F}(x, y) = 3x - 2y$

- **F(1, 2) = 3(1) - 2(2) = 3 - 4 = -1**
- **F(1, 4) = 3(1) - 2(4) = 3 - 8 = -5**
- **F(5, 2) = 3(5) - 2(2) = 15 - 4 = 11**
- **F(5, 8) = 3(5) - 2(8) = 15 - 16 = -1**

- ***f*(1, 4) = -5   minimum**
- ***f*(5, 2) = 11   maximum**

Exemplul 2

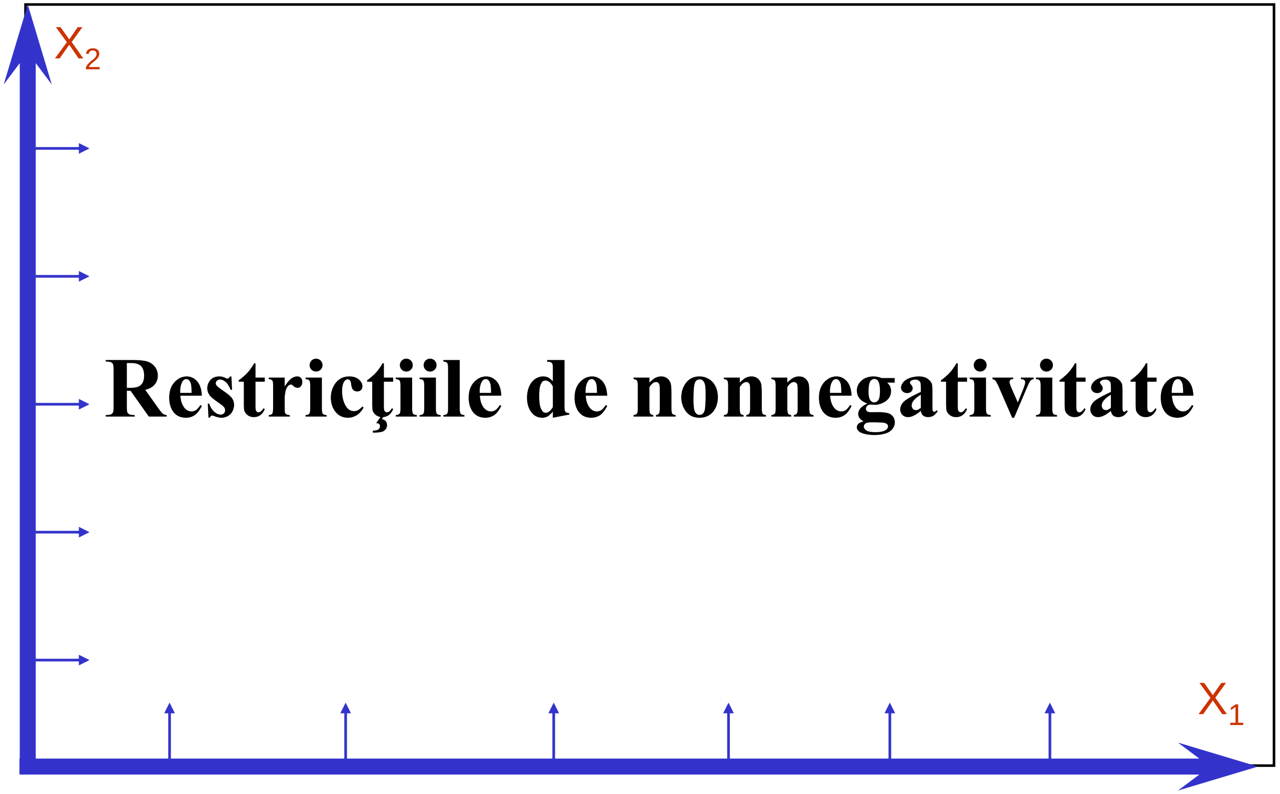
$\max \; 8X_1 + 5X_2$ — **funcţia obiectiv**

$$\begin{cases} 2X_1 + 1X_2 \le 1000 \\ 3X_1 + 4X_2 \le 2400 \\ X_1 + X_2 \le 700 \\ X_1 - X_2 \le 350 \\ X_j > = 0, \; j = 1,2 \end{cases}$$

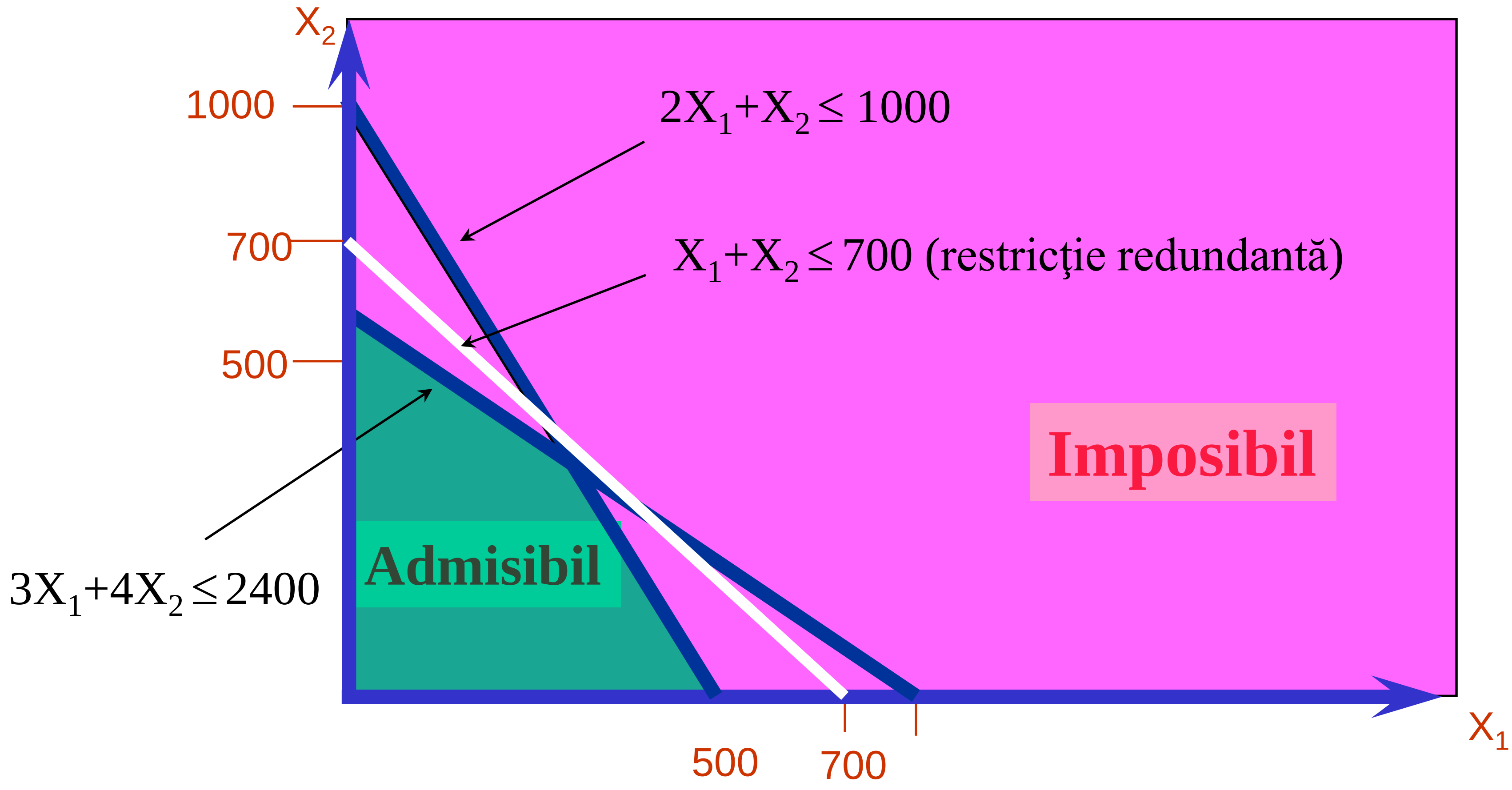
restricţii de inegalitate

restricţii de nonnegativitate

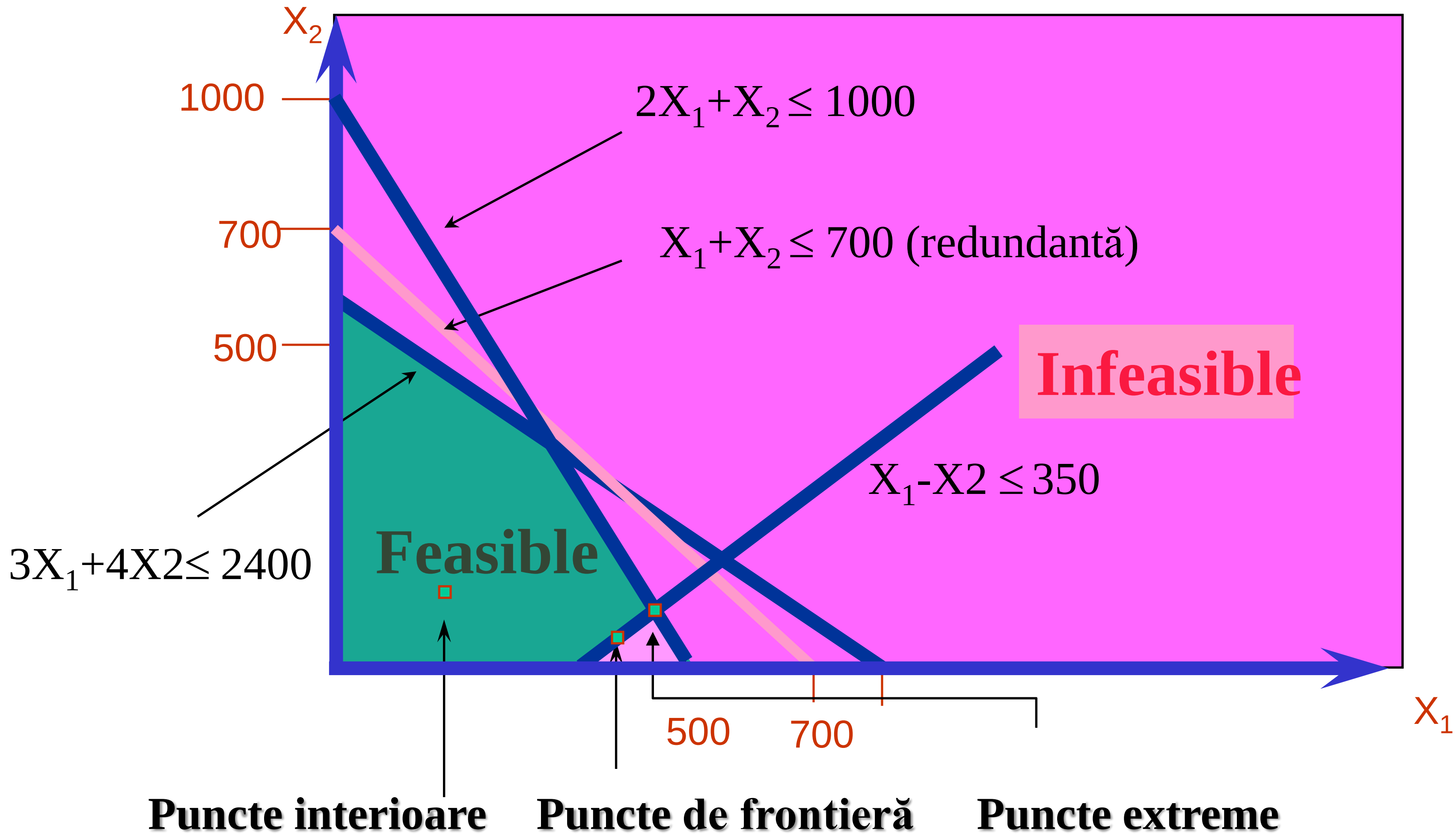
Analiza grafică – Mulţimea admisibilă



Analiza grafică – Mulţimea admisibilă



Analiza grafică – Mulţimea admisibilă



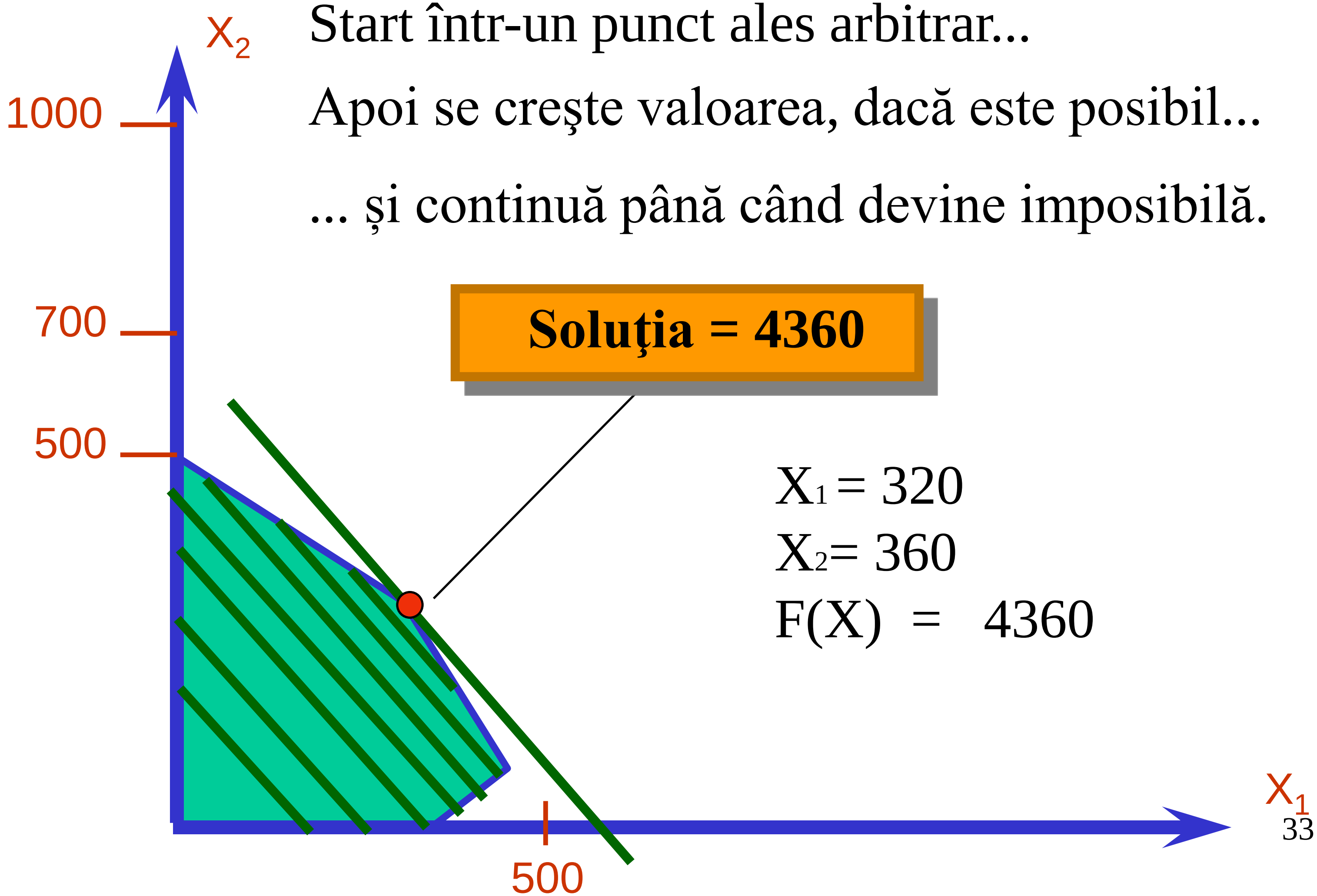
- **Există trei tipuri de puncte admisibile**

Determinarea soluţiei optime

Start într-un punct ales arbitrar...

Apoi se creşte valoarea, dacă este posibil...

... şi continuă până când devine imposibilă.



$X_1 = 320$

$X_2 = 360$

$F(X) = 4360$

Exemplul 3

Determinaţi valoarea minimă şi maximă a funţiei

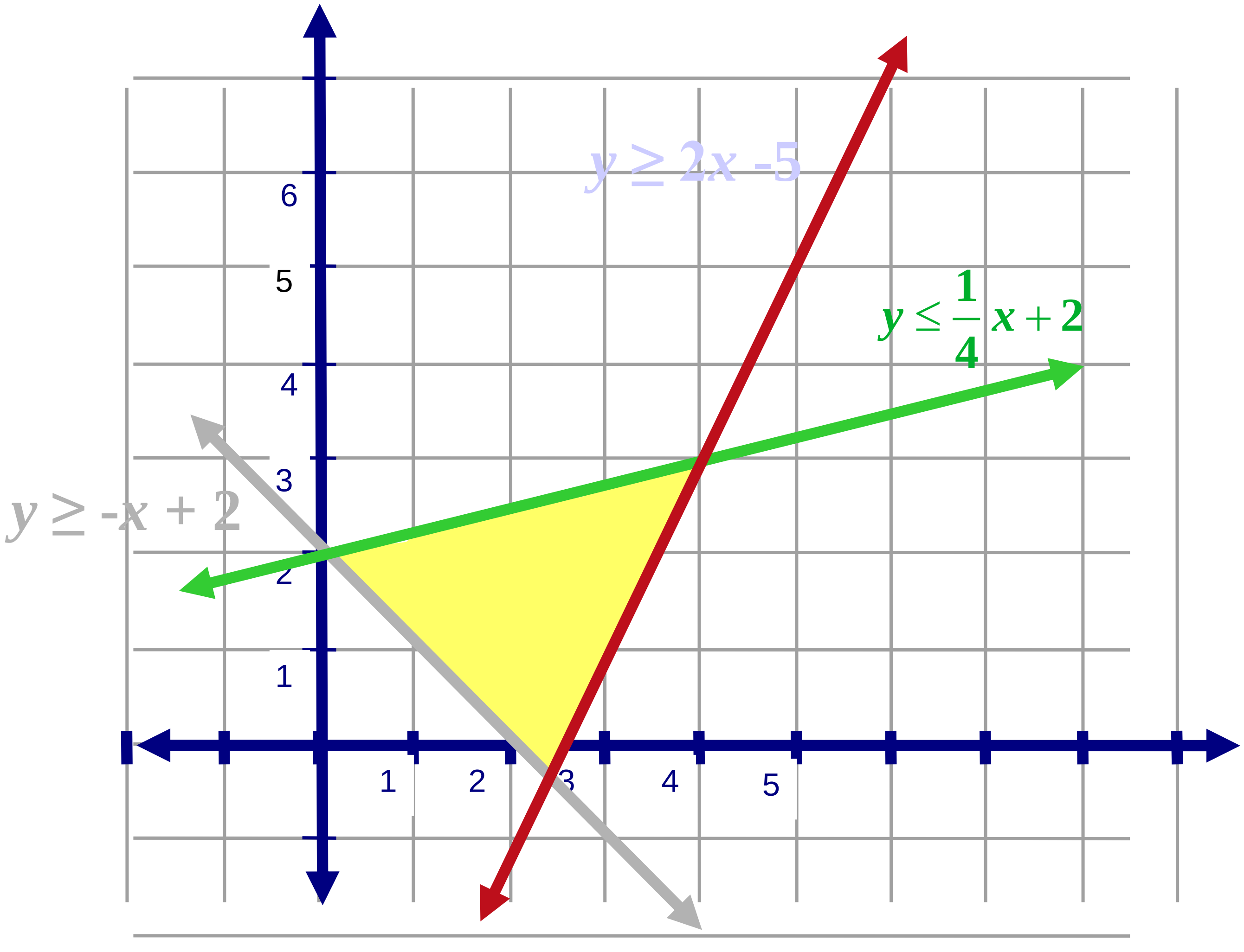
$F(x, y) = 4x + 3y$

în prezenţa restricţiilor

$y \geq -x + 2$

$y \leq \frac{1}{4}x + 2$

$y \geq 2x - 5$



y ≥ 2x -5
y ≤ 1/4 x + 2
y ≥ -x + 2
6
5
4
3
2
1
1
2
3
4
5

Vârfurile poliedrului convex:

$$\mathbf{F}(x, y) = 4x + 3y$$

$$F(0, 2) = 4(0) + 3(2) = 6$$

$$\mathrm{F}(4, 3) = 4(4) + 3(3) = 25$$

$$\mathrm{F}\left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}\right) = 4\left(\frac{7}{3}\right) + 3\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{28}{3} - 1 = \frac{25}{3}$$

$f(0, 2) = 6$ **minimum**

$f(4, 3) = 25$ **maximum**

Metoda simplex primal

Metoda geometrică nu poate fi extinsă la probleme PL pentru care numărul de variabile de decizie este mai mare de 3.

Această metodă reprezintă una dintre cele mai folosite metode de rezolvare a problemelor de programare liniară.

- **mulţimea soluţiilor admisibile este un poliedru convex;**
- **orice punct de extrem local este un punct de extrem global, funcţia obiectiv fiind liniară;**
- **funcţia obiectiv fiind liniară, extremul se atinge într-unul din vîrfurile poliedrului soluţiilor admisibile.**

Metoda simplex primal

Să considerăm forma standard a unei probleme de programare liniară.

$$\max(\min) F(X) = \max(\min) CX \qquad (1)$$

$$AX = b \qquad (2)$$

$$X \geq 0 \qquad (3)$$

$X, C \in R^n$, $b \in R^m$. rang (A) = rang (A, b), $\rightarrow$ m < n.
In aceste condiţii este posibil să găsim m vectori a_j care să formeze o bază B din componente independente.

$$X = \begin{bmatrix} X^B \\ X^R \end{bmatrix}; \quad A = [B, R]; \quad C = [C^B, C^R] \qquad (4)$$

Metoda simplex

Folosind relaţia (4), expresia (2) poate fi scrisă astfel:

$$[B\ R] \cdot \begin{bmatrix} X^B \\ X^R \end{bmatrix} = b \qquad (5)$$

din care rezultă:

$$X^B = B^{-1} \cdot b - B^{-1} \cdot R \cdot X^R \qquad (6)$$

Luând în considerare relaţiile (4), expresia funcţiei obiectiv devine:

$$F = C^B \cdot X^B + C^R \cdot X^R \qquad (7)$$

Dacă variabilele suplimentare sunt nule ($X^R = 0$), o soluţie de bază poate fi determinată

$$X^B = \overline{X}^B = B^{-1} \cdot b \qquad (8)$$

Metoda simplex

Această soluţie este admisibilă dacă toate componentele sale sunt nonnegative:

$$F = \overline{F} = C^B \cdot \overline{X}^B = C^B \cdot B^{-1} \cdot b \qquad (9)$$

Matricele B şi R din expresiile de mai sus au următoarele forme:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}; \qquad R = \begin{bmatrix} a_{1,m+1} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s,m+1} & \dots & a_{sj} & \dots & a_{sn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,m+1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (10)$$

Dacă se introduce notaţia:

$$G = (B^{-1} \cdot R) \qquad (11)$$

relaţia (6) devine:

$$X^B = B^{-1} \cdot b - B^{-1} \cdot R \cdot X^R = B^{-1} \cdot b - G \cdot X^R \qquad (12)$$

Metoda simplex

unde matricea G are următoarea formă :

$$R = \begin{bmatrix} g_{1,m+1} & \cdots & g_{1j} & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{s,m+1} & \cdots & g_{sj} & \cdots & g_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{m,m+1} & \cdots & g_{mj} & \cdots & g_{mn} \end{bmatrix} \qquad (13)$$

Plecând de la o soluţie de bază (aleasă iniţial aleatoriu), prin modificări succesive, orientate în direcţia creşterii funcţiei obiectiv F, vor fi determinate noi soluţii de bază, astfel încât în final să fie obţinută soluţia optimă.

Relaţia (12) poate fi scrisă detaliat pe baza notaţiilor de mai sus, pentru o linie *s*:

$$X_s = \overline{X}_s^B - \sum_{j=m+1}^{n} g_{sj} \cdot x_j \,, \quad s = 1, \ldots, m \qquad (14)$$

Metoda simplex

Deasemenea, din relaţia (7) rezultă:

$$F = \sum_{s=1}^{m} C_s \cdot X_s + \sum_{j=m+1}^{n} C_j \cdot x_j \ , \quad s = 1, \ldots, m \qquad (15)$$

În continuare, din relaţiile (14) şi (15) se poate deduce:

$$F = \overline{F} - \sum_{j=m+1}^{n} x_j (F_j - C_j) \qquad (16)$$

unde:

$$F_j = \sum_{s=1}^{m} C_s \cdot g_{sj} \qquad (17)$$

Dacă dorim ca $\overline{X}^B$ să fie soluţie optimală, adică:

$$\overline{F} = C^B \cdot \overline{X}_s^B = C^B \cdot B^{-1} \cdot b \qquad (18)$$

Metoda simplex

să fie maxim, este necesar ca:

$$(F_j - C_j) \geq 0 \quad (\forall)\ j = m+1, \dots, n \qquad \textbf{(19)}$$

Relaţia (19) reprezintă condiţia de optimalitate a problemei PL.

In caz contrar, pentru apropierea rapidă de soluţia optimală este nevoie ca:

$$(F_l - C_l) = \max_j \left| F_j - C_j \right|, \quad j = m+1, \dots, n \qquad \textbf{(20)}$$

Relaţia (20) reprezintă condiţia de intrare în bază pentru variabila X_l.

Pentru a determina relaţia de ieşire din bază revenim la relaţia (14). Pentru variabila X_l se obţine:

$$X_s = \overline{X}_s^B - g_{sl} \cdot X_l \geq 0, \quad s = 1, \dots, m \qquad \textbf{(21)}$$

Metoda simplex

Dacă $g_{sl} > 0$, rezultă:

$$\frac{\overline{X}_s^B}{g_{sl}} - X_l \geq 0 \qquad \textbf{(22)}$$

de unde:

$$\theta_k = \min_s \left\{ \frac{\overline{X}_s^B}{g_{sl}}, \quad g_{sl} \geq 0 \right\} \qquad \textbf{(23)}$$

Relaţia (23) reprezintă condiţia de ieşire din bază pentru variabila X_l.

Algoritmul metodei Simpex primal

Etapele principale ale metodei simplex sunt următoarele

Etapa 1. Calculul matricei G:

$$G = B^{-1} \cdot R = g_{sj}$$

Etapa 2. Calculul diferenţelor F_j - C_j:

$$(F_j - C_j) = \sum_{s \in I} C_s \cdot g_{sj} - C_j, \quad j = m+1, \dots, n$$

Etapa 3. Se analizează semnele diferenţelor F_j - C_j:

- dacă ($F_j – C_j$) > 0, atunci $\overline{X}^B$ este o soluţie optimală;
- dacă ($F_j – C_j$) < 0, se trece la punctul următor.

Etapa 4. **Se alege variabila de intrare în bază :**

$$(F_l - C_l) = \max_j \left| F_j - C_j \right|, \quad j = m+1, \ldots, n$$

Etapa 5. **Se găseşte variabila k ce părăseşte baza cu relaţia:**

$$\P \quad \theta_k = \min_s \left\{ \frac{\overline{X}_s^B}{g_{sl}}, \quad g_{sl} \geq 0 \right\}$$

Etapa 6. **Se formează o altă bază şi se reia calculul de la pasul 1, criteriul de oprire fiind cel specificat la pasul 3.**

DUALITAEA
Minimizarea cu resticţii de forma "≥"

- **Problemele de programare liniară există întotdeauna în perechi. Astfel în programarea liniară, fiecărei probleme de maximizare îi este ataşată o problemă de minimizare. După ce vom avea o problemă cu funcția obiectiv care trebuie maximizată, cu ajutorul relației de dualitate se poate scrie versiunea de minimizare. Problema originală a programării liniare este cunoscută ca fiind problema primală, iar problema derivată este cunoscută sub numele de problema duală.**

Formularea matematică a problemei duale

Problema primală (P):

$$\max \quad F = c^T X$$
$$AX \le b$$
$$X \ge 0 \quad \text{(m ecuaţii, n variabile)}$$

Problema duală (D):

$$\min \quad Z = Y^T b$$
$$A^T Y \ge c$$
$$Y \ge 0 \quad \text{(n ecuaţii, m variabile)}$$

Teorema dualitatii: Dacă X is soluţie admisibilă pentru P şi Y este soluţie admisibilă pentru D, atunci $c^T X \le Y^T b$ iar condiţia de optimalitate este $c^T X = Y^T b$.

Exemplu 1

Problema primală (forma generală)	Problema primală	Problema duală	Problema duală (forma generală)

Minimize $\quad C=3x_1+5x_2$

Subject to $\quad x_1 \geq 4$

$\Rightarrow 2x_2 \geq 12$

$3x_1+2x_2 \geq 18$

and $\quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

$$\Rightarrow A=\left|\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 12 \\ 3 & 2 & 18 \\ \hdashline 3 & 5 & 1 \end{array}\right|$$

$$\Rightarrow \quad A^T=\left|\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ \hdashline 4 & 12 & 18 & 1 \end{array}\right|$$

Maximize $\quad Z=4y_1+12y_2+18y_3$

Subject to $\quad y_1+3y_3 \leq 3$

$2y_2+2y_3 \leq 5$

and $\quad y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0$

1. **Termenii liberi din sistemul de restricţii din problema primală devin coeficiecţii funcţiei obiectiv din problema duală.**

2. **Coeficienţii funcţiei obiectiv din problema duală devin termenii liberi ai sistemului de restricţii din problema primală.**

Observaţii:

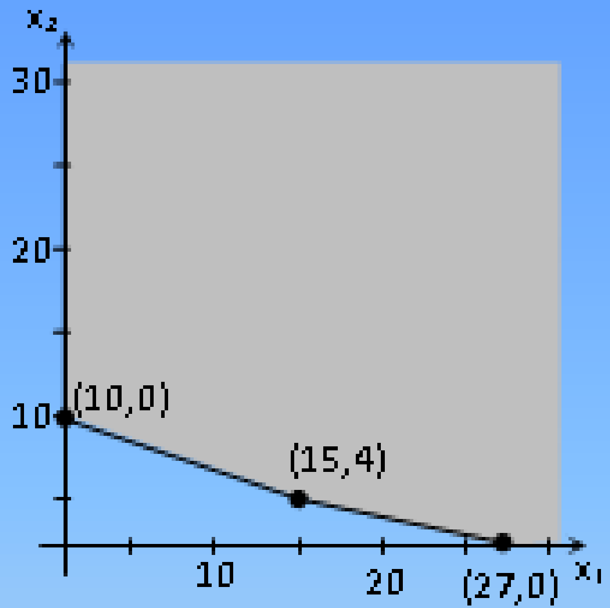
- Numărul de variabile din problema primală este egal cu numărul de restricţii din problema duală.
- Numărul de restricţii din problema primală este egal cu numărul variabilelor din problema duală.
- Matricea coeficienţilor în problema duală este matricea transpusă a coeficienţilor din problema primală.
- Dacă problema primală este o problemă de maxim, atunci problema duală va fi una de minim.
- elementele vectorului b din problema primală sunt coeficienţii funcţiei obiectiv în problema duală.
- coeficienţii funcţiei obiectiv din problema duală sunt elementele vectorului b in problema primală.

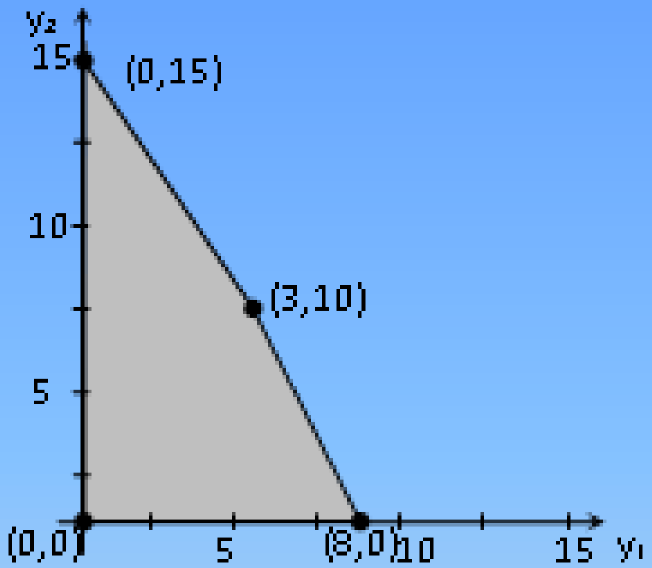
Concluzii

Problema primală	Problema duală
(a) max.	min
(b) Funcţia obiectiv (coeficienţii c).	Termenii liberi din sistemul de restricţii (coeficienţii c)
(c) Termenii liberi din sistemul de restricţii (coeficienţii b)	Funcţia obiectiv (termenii b).
(d) Linia i din matricea A	Coloana i din matricea A
(e) Coloana j din matricea A	Linia j din matricea A

EXEMPLUL 2

PROBLEMA PRIMALĂ(1)	PROBLEMA DUALĂ(2)
Min $F = 16x_1 + 45x_2$	Max $P = 50y_1 + 27y_2$
$2x_1 + 5x_2 \geq 50$ $x_1 + 3x_2 \geq 27$ $x_1, x_2 \geq 0$	$2y_1 + y_2 \leq 16$ $5y_1 + 3y_2 \leq 45$ $y_1, y_2 \geq 0$





Vârful poliedrului	
(x_1, x_2)	$F = 16x_1 + 45\, x_2$
(0,10)	450
(15,4)	420
(27,0)	432
Min C=420 pentru (15,4)	

Vârful poliedrului	
(y_1, y_2)	$P = 50y_1 + 27\, y_2$
(0,0)	0
(0,15)	405
(3,10)	420
(8,0)	400
Max P=420 pentru (3,10)	

Reoptimizarea în PL

- **Modificarea elementelor vectorului *b*.**

- **Modificarea elementelor vectorului *C*.**

- **Modificarea strucurii matricei *A*.**
  - **Apariţia unei noi variabile de optimizare.**
  - **Apariţia unei noi restricţii.**
  - **Modificarea coeficienţilor matricei A.**